教材開発

モデルベース設計に基づく速度制御系教材の開発

千葉職業能力開発短期大学校　岡田 侑大，五十嵐 智彦

1．はじめに

近年の第４次産業革命進展に伴い，多くの設備が急速にオートメーション化したことから，制御工学が教育現場において重要度を増している。

その一方，一般的な制御工学の講義では，伝達関数や状態方程式等の数学を用いた抽象的な議論に偏りが生じやすい。初学者にとっては具体的な物理的イメージが実装と結び付かないために，教育現場において不人気科目として認知されることが多い。そこで，制御工学理論と物理的イメージを結び付けられる教材が提案されている。

例えば，北海道職業能力開発大学校の茂木は「実機とシミュレーションを連携したフィードバック制御に係る教材の作成及びその教育訓練に関する検討」[1]において，シミュレーション技術に基づくPID制御の直感的イメージを持つことを可能にする位置・角度制御系教材を提案している。

また，宇都宮大学の平田は,「ArduinoとMATLABで制御系設計をはじめよう!」[2]において，模型用DCモータの速度制御系および，極指定法を用いたPIゲインの設計，さらにはBall and Beam実験装置を用いた位置・角度制御を行っている。

上記を含む制御系教材の大半は，マイコン等を用いてディジタル実装されており，演算時間に起因する無駄時間が生じる場合がある。無駄時間は，伝達関数では高次遅れ系と見なされるため，制御対象が１次遅れ系にもかかわらずステップ応答が振動を起こす等，制御理論とは異なる挙動を示す場合がある。

そこで筆者らは，可能な限り理論に忠実な挙動を示す初学者向けの制御系教材が必要と考え，アナログ回路による模型用DCモータの速度制御系設計に基づく教材を開発した。本稿では，開発教材が制御理論通りの現象を示すかを検証した。その結果，おおむね理論通りの結果を得られたので報告する。

2．本教材の仕様

本教材は，制御対象を定格5Vの模型用DCモータとして，このモータに速度フィードバックをかけることで，負荷トルクの変動に関係なく一定の速度で回転させることを目的としている。速度検出は図１に示すように，別途用意した同形式のDCモータの軸同士を機械的に結合させ，回転数を電圧に変換することで速度を検出する仕組みを設けている。

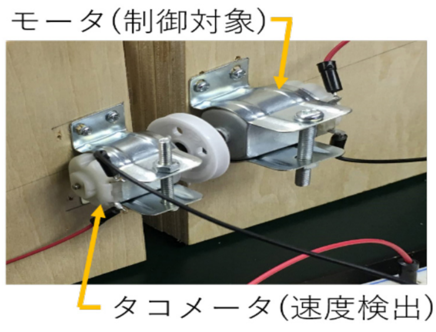


図１　本教材の制御対象モータとタコメータ部分

本稿では，下記４項目の製作手順を設け，フィードバック制御による速度制御系を開発した。

① ブロック線図による制御系の構成
② アナログ電子回路による制御器の設計
③ 伝達関数のパラメータ同定
④ 極指定法によるPIゲインの設計

2.1 ブロック線図による制御系の構成

図２はDCモータのブロック線図を示す。また，別添図１に本速度制御系教材のブロック線図を示す。別添図1，2，3の点線で示すα部分は，DCモータ相互を示し，図２は該当部分の抜き出しである。

回転速指令値は，指令値電圧V_r^* [V]で与え，指令値電圧がタコメータ出力電圧V_t [V]と一致するようにフィードバック系を構成している。ここで，タコメータは回転速度と出力電圧がおおむね比例関係にあると見なし，伝達関数をK_{e2}と置く。DCモータにはFETを用いたチョッパ回路より電圧を加える。その際，チョッパ回路のチョッパ定数をK_cと置く。

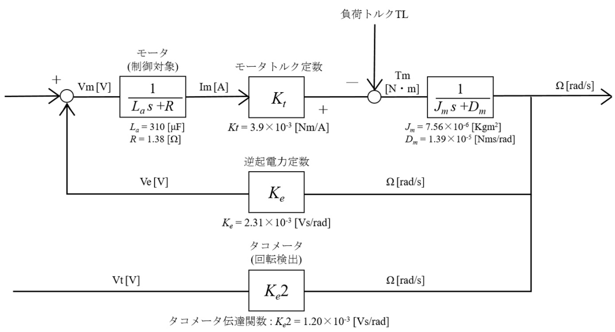


図２ 制御対象（模型用 DC モータ）のブロック線図

2.2 アナログ電子回路による制御器の設計

制御対象の模型用DCモータはモータ内部の粘性摩擦D_m等が原因で回転しない非線形な系（偏差部）を持つ。一般に，制御系設計は制御対象が線形な系である方が簡易に行える。本教材では制御系設計を簡易に行うために，偏差部にoffset電圧を加えるoffset生成回路を設けた。別添図１をアナログ電子回路にて実現するべく，DCモータをPWM制御する主回路，PWM制御用三角波生成回路，フィードバック制御回路（PI制御），各制御回路の電圧を安定化させるDC/DCコンバータを用いた電源ライン製作回路，指令値波形となる矩形（くけい）波生成回路およびoffset生成回路を設計した。

2.3 伝達関数のモータ内部パラメータ同定

制御系設計をモデルベースで設計するべく，別添図１に示したブロック線図の各パラメータを同定する必要がある。以下，各パラメータの同定方法をそれぞれ紹介していく。

(a) モータチョッパ定数K_c

チョッパでの入力指令値と出力PWM電圧には，比例関係があると考え，チョッパ定数をK_cと置いた。チョッパ出力電圧V_{out}は，出力電圧が矩形波であるので，平均値を出力電圧値として扱った。

本回路は，DCモータが誘導性負荷であると見なせる。負荷電流が小さく，かつスイッチング周波数が低い場合には電流不連続モードが発生してしまう。一般に，電流不連続モードでは出力電圧が理論値よりも上昇することが知られている。系の線形性を確保するべく，電流連続モードでの使用が望ましい。

図３，４はスイッチング周波数をそれぞれ1kHzと5kHzにしてDCモータを駆動させた際のFET D-S間の電圧波形をそれぞれ示す。スイッチング周波数が1kHzでは，電流不連続モードとなっているが，5kHzでは電流連続モードが成されていることが確認できる。よって，チョッパ定数K_cの同定実験はスイッチング周波数を5kHzで行う。

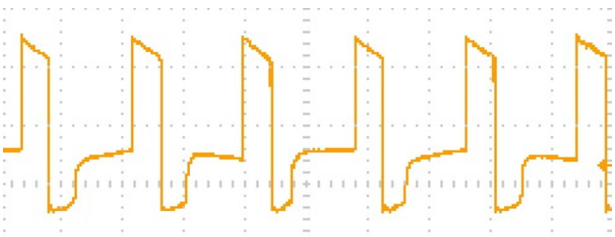


図３ FET の D-S 間電圧
（スイッチング周波数 1kHz: 不連続モード）

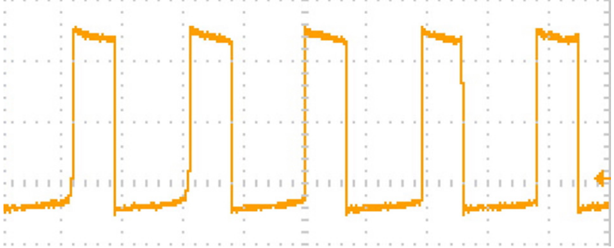


図４ FET の D-S 間電圧
(スイッチング周波数 5kHz: 連続モード)

本実験条件を踏まえ，チョッパ定数K_cを同定する。チョッパの出力電圧V_{out}は以下の式で表される。

$$V_{out} = d \times V_{cc} = K_c \times V_{in}\ [\mathrm{V}]\ \cdot\cdot\cdot\ 式（1）$$

ここで，dデューティ比，V_{cc}電源電圧である。

別添図４のオープンループ・フィードバック切り替えスイッチをオープンループ側にして，チョッパ入力電圧V_{in}を変化させたときのチョッパ出力電圧V_{out}の関係からK_cを同定する。図５にV_{in}とV_{out}の関係を示す。最小二乗法より，傾きが2.02と求まったため，モータチョッパ定数 K_c = 2.02と同定した。

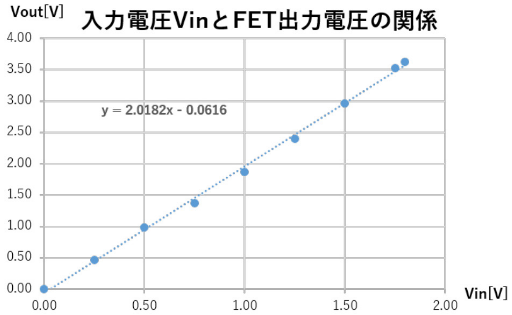


図５　チョッパの指令値電圧と出力平均電圧

（b）モータ内部抵抗R

模型用DCモータの内部等価回路と測定回路を図６に示す。同回路では，誘導起電力が0Vとなるように指で軸を拘束すると，模型用DCモータにかかる電圧と電流の関係より内部抵抗が同定できる。図７にDCモータの電流と電圧の関係を示す。最小二乗法を用いて傾きを1.38と求めた。よって，模型用DC モータ内部抵抗R =1.38 Ωと同定した。

（c）モータ内部リアクタンスL_a

模型用DCモータの内部リアクタンス測定回路を図８に示す。同図の通り，模型用DCモータにLCRメータを接続することで，内部リアクタンスL_aを測定する。測定結果より，L_a = 310 μHと同定した。

（d）モータトルク定数K_tと逆起電力定数K_e

模型用DCモータに負荷トルクT_Lをかけ，そのときの回転速度Nとタコメータ出力電圧Vt からモータトルク定数K_tと逆起電力定数K_eをそれぞれ同定する。負荷トルクT_Lは，図９に示すプーリにエナメル

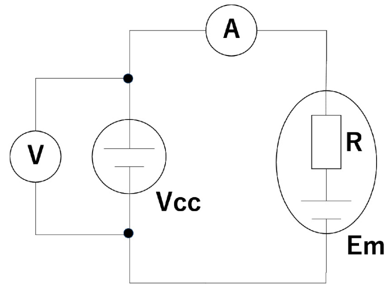


図６　モータ内部抵抗 *R* 同定実験回路図

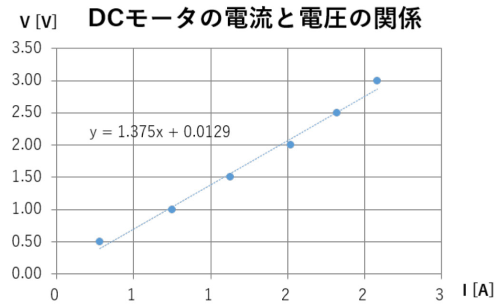


図７　モータ内部抵抗 *R* 同定結果（最小二乗法）

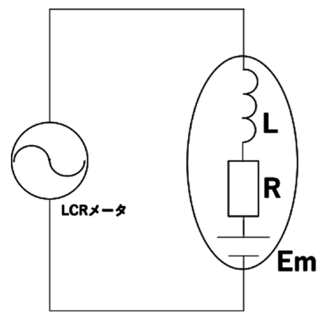


図８　モータ内部リアクタンス *La* 同定実験回路図

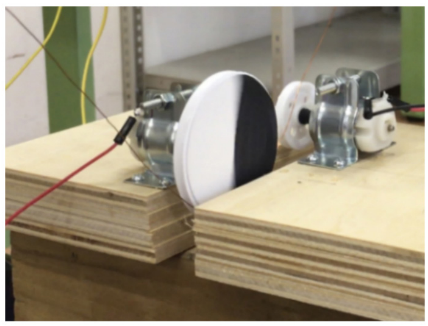


図９　モータ回転数測定用白黒円盤

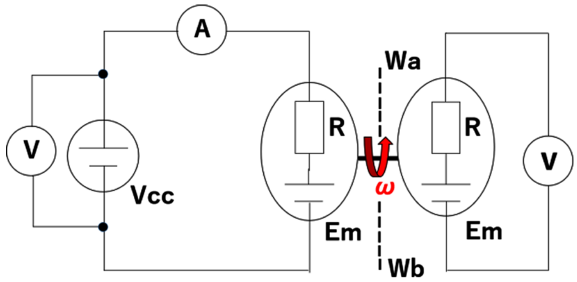


図 10　モータ負荷トルク実験回路図

線をかけ，その両端にばねばかりを設けることで与えることにした。一方のばねばかりを固定し，もう一方のばねばかりの先に，手により引っ張り力を加える。両端のばねばかりの読みをそれぞれW_a [kg]とW_b [kg]とし，実験回路図を図10に示す。この読みの差を次式に用いて負荷トルクT_Lを算出する。

$$T_L = (W_a - W_b) \times L \quad ・・・式（2）$$

上式におけるLは，図９に示すプーリの直径とエナメル線の直径の合計値とする。回転数は，同じく図９に示す白黒円盤をプーリの側面に取り付け，回転数測定器を用いて測定する。

負荷トルクを変化させた際のモータ電流I_m，タコメータ出力電圧V_t，回転速度Nをそれぞれ測定する。各値を用いてモータトルク定数K_tと逆起電力定数K_eそれぞれを同定する。

（d）-1　モータトルク定数K_t

モータ電流I_mとモータトルクT_mの間には，次式の関係性が成り立つことが知られている。

$$T_m = K_t \times I_m \quad ・・・式（3）$$

式（3）より，モータトルク定数K_tを同定する。

モータ電流とモータトルクの関係を図11に示す。最小二乗法より傾きを0.0039と求めた。モータトルク定数 $K_t = 3.90 \times 10^{-3}$ Nm/Aと同定した。

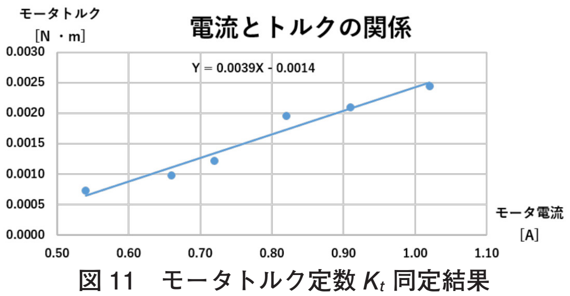


図 11　モータトルク定数 K_t 同定結果

（d）-2　逆起電力定数K_e

逆起電力V_e[V]と角速度Ω[rad/s]の間には，次式の関係性が成り立つことが知られている。

$$V_e = K_e \times \Omega \text{[Vs/rad]} \quad ・・・式（4）$$

ただし，角速度Ω[rad/s]と回転数N[rpm]の関係は以下の通りである。

$$\Omega = \frac{2\pi N}{60} \text{[rad/s]} \quad ・・・式（5）$$

式（4）より，逆起電力V_eと角速度Ωの関係が分かれば逆起電力定数K_eを同定できるが，逆起電力を直接測定するのは困難である。しかし，無負荷時の電流が十分に小さいと仮定すると，逆起電力は電源電圧に等しいと考えることができる。

モータトルクとモータ回転数の関係を図12に示す。最小二乗法より無負荷時の回転数を推定し，逆起電力が電源電圧とほぼ等しいと見なすことで逆起電力定数K_eを同定する。

最小二乗法により１次方程式として近似すると，その切片は6649と求まる。よって，無負荷時の回転数は6649rpmと推定できる。ここで，図10を用いた実験時の電源電圧は1.61Vである。

式（4），(5）それぞれに各値を代入した結果，逆起電力定数 $K_e = 2.31 \times 10^{-3}$ Vs/rad と同定した。

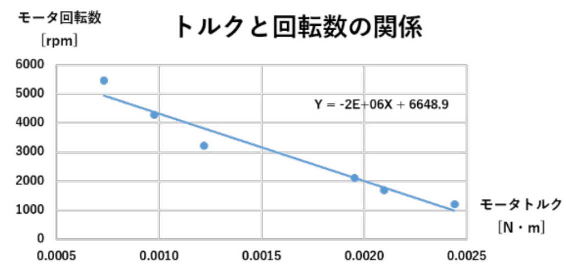


図 12　逆起電力定数 K_e 同定結果

（e）粘性摩擦係数 D_m

本教材の回転系における運動方程式は，次式のように成り立つ。

$$T = J_m \frac{d\Omega}{dt} + D_m \Omega \quad ・・・式（6）$$

ただし，J_mはモータの慣性モーメントである。式（6）に式（3）を代入すると，次式のようになる。

$$K_t I_m = J_m \frac{d\Omega}{dt} + D_m \Omega \quad ・・・式（7）$$

さらに，定常状態においては，

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad ・・・式（8）$$

と置くことができるので，式（7）に代入して，

$$K_t I_m = D_m \Omega \quad ・・・式（9）$$

となる。よって，粘性摩擦係数 D_mは，下記の式より求めることができる。

$$D_m = \frac{K_t}{\Omega} I_m \quad ・・・式（10）$$

今回は，モータ印加電圧は1.61 V一定とする。負荷を加える際，片方のばねばかり W_a [kg]の値が15.0gになるまで2.5gずつ加えていき，各粘性摩擦係数の平均値を算出した。その結果，1.39×10^{-5}と算出したので，粘性摩擦係数 D_m = 1.39×10^{-5} Nms/radと同定した。

(f) タコメータ伝達関数 K_{e2}

タコメータの出力電流は非常に小さいと仮定して，出力電圧は回転数に比例すると見なすことができる。よって，回転数と出力電圧V_tの関係が分かれば，Ke_2 を同定できる。図13に回転数と出力電圧V_tの関係を示す。最小二乗法より傾きを0.0012と求めた。よって，タコメータ伝達関数 K_{e2} = 1.20×10^{-3} Vs/radと同定した。

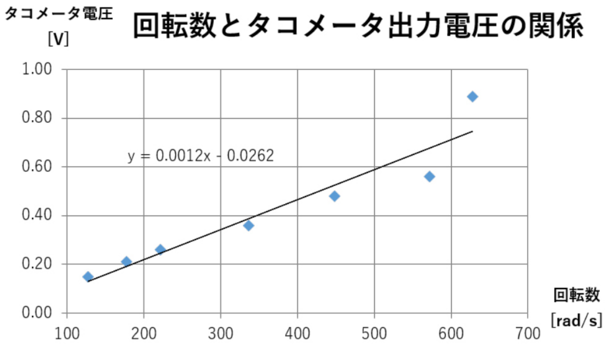


図 13　タコメータ伝達関数 K_{e2} 同定結果

(g) モータ慣性モーメント J_m

モータ慣性モーメントは，モータ印加電圧をステップ入力としたときの，回転数のステップ応答より同定することができる。その様子を図14に示す。

また，本回路におけるモータの一巡伝達関数は，別添図１より次式のように求められる。

$$\Omega=(V-\Omega K_e)\frac{1}{L_as+R}K_t\frac{1}{J_ms+D_m}\quad・・・式（11）$$

式（11）を整理し，モータの伝達関数を求める。その際，別添図１に示す通り，モータの伝達関数を α と置く。α について整理すると，

$$\Omega=\frac{\Omega}{V}=\frac{K_t}{L_aJ_ms^2+(L_aD_m+RJ_m)s+(RD_m+K_tK_e)}\quad・・・式（12）$$

となる。ただし，(b) と (c) の結果より，$R >> L_a$と見なすことができるので，モータ内部リアクタンス L_a = 0と置くことができる。式（12）を１次遅れ標準形として整理すると，次式が成り立つ。

$$\Omega=\frac{\Omega}{V}=\frac{\frac{K_t}{RD_m+K_tK_e}}{\frac{RJ_m}{RD_m+K_tK_e}s+1}\quad・・・式（13）$$

ただし，1次遅れ標準形において，τ は時定数，K はゲインである。式（13）より

$$\tau=\frac{RJ_m}{RD_m+K_tK_e}\quad・・・式（14）$$

と，導くことができる。モータ慣性モーメント J_m について整理すると，次式のようになる。

$$J_m=\frac{\tau(RD_m+K_tK_e)}{R}\quad・・・式（15）$$

図14はモータにステップ電圧を印加したときのタコメータ出力電圧を示す。図14より時定数 τ は0.37 sと求めることができた。よって，式（15）に表1の各値と時定数 τ を代入して，モータ慣性モーメント J_m = 7.56×10^{-6} kgm^2 と同定した。

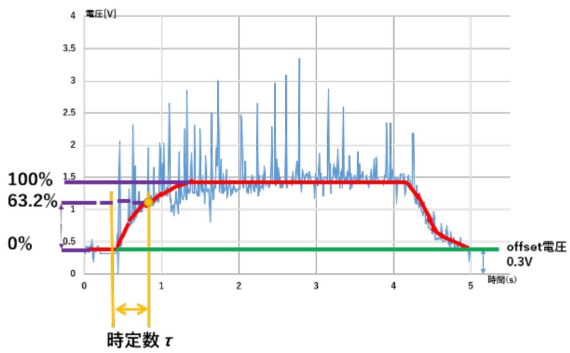


図 14　回転数のステップ応答

以上により，各パラメータの同定を行った。(a) から (g) の各値を表１にまとめた。

表 1 モータ内部パラメータ同定一覧

a	モータチョッパ定数 K_c	2.02	単位なし
b	モータ内部抵抗 R	1.38	[Ω]
c	モータ内部リアクタンス L_a	310	[μH]
d-1	モータトルク定数 K_t	3.90×10^{-3}	[Nm/A]
d-2	逆起電力定数 K_e	2.31×10^{-3}	[Vs/rad]
e	粘性摩擦係数 D_m	1.39×10^{-5}	[Nms/rad]
f	タコメータ伝達関数 Ke_2	1.20×10^{-3}	[Vs/rad]
g	モータ慣性モーメント J_m	7.56×10^{-6}	[kgm^2]

2.4　極指定法によるPIゲインの設計

PI制御系の構成において，PIゲインを選定する方法は幾つも提案されている。本稿では，極指定法を用いてモデルベースに基づくPIゲインの設計を行うことにした。初めに，別添図１の点線部分αが示すDCモータの伝達関数を求める。式（13）に表１の各値を代入すると，次式が得られる。

$$\alpha = \frac{\Omega}{V} = \frac{137}{0.37s+1} \quad ・・・式（16）$$

式（16）を用いるとP制御におけるブロック線図は，別添図２と構成できる。また，PI制御におけるブロック線図は別添図３と構成できる。

（a）P制御のゲイン設計

初めに，別添図２において指令値V_r*から回転角速度Ωまでの閉ループ伝達関数をDと置く。閉ループ伝達関数Dは前向き伝達関数βと一巡伝達関数εより構成されており，次式より求められる。

$$\mathrm{D} = \frac{\beta}{1+\varepsilon} \quad ・・・式（17）$$

別添図２の前向き伝達関数βは，

$$\beta = K_p K_c \alpha = \frac{279K_p}{0.37s+1} \quad ・・・式（18）$$

と求められる。同様に一巡伝達関数εは，

$$\varepsilon = K_p K_c \alpha K_{e2} = \frac{0.33K_p}{0.37s+1} \quad ・・・式（19）$$

と求められる。よって，閉ループ伝達関数Dは，

$$D = \frac{\Omega}{V^*} = \frac{\beta}{1+\varepsilon} = \frac{\frac{279K_p}{0.37s+1}}{1+\frac{0.33K_p}{0.37s+1}} = \frac{754K_p}{s+\frac{0.33K_p+1}{0.37}} \quad ・・・式（20）$$

となる。ここで，K_pは比例ゲインである。式（20）より特性方程式を導出すると次式が求められる。

$$s = -(0.89K_p + 2.70) \quad ・・・式（21）$$

従って，比例ゲインK_pは，

$$K_p = -1.12s - 3.03 \quad ・・・式（22）$$

と求められる。式（22）におけるsは伝達関数の極であり，任意の負の実数を指定することができる。

（b）PI制御のゲイン設計

（a）の場合同様，別添図3より指令値Vr*から回転角速度Ωまでの閉ループ伝達関数D'を求める。別添図３において，制御器の伝達関数をγとおく。このとき，別添図３のγは次式により求められる。

$$\gamma = \left(1 + \frac{1}{T_s}\right) K_p = K_p + \frac{K_I}{s} \quad ・・・式（23）$$

また，Tは積分器の時定数である。積分ゲインK_Iは次式により定義する。

$$K_I = \frac{K_p}{T} \quad ・・・式（24）$$

別添図３より前向き伝達関数β'は，

$$\beta' = \gamma K_c \alpha = \frac{279kps+279KI}{0.37s^2+s} \quad ・・・式（25）$$

と求められる。同様に，一巡伝達関数ε'は，

$$\varepsilon' = \gamma K_c \alpha K_{e2} = \frac{0.33kps+0.33KI}{0.37s^2+s} \quad ・・・式（26）$$

と求まる。よって，閉ループ伝達関数D'は，

$$D' = \frac{\Omega}{V*} = \frac{\beta'}{1+\varepsilon'} = \frac{\frac{279K_ps+279K_I}{0.37s^2+s}}{1+\frac{0.33K_ps+0.33K_I}{0.37s^2+s}}$$

$$= \frac{279K_ps+279K_I}{0.37s^2+(1+0.33K_p)s+0.33K_I} \quad ・・・式（27）$$

（a）同様に，式（27）より，特性方程式を導出すると次式が求められる。

$$s^2 + (2.70 + 0.89K_p)s + 0.89K_I = 0 \quad ・・・式（28）$$

式（28）の解をP_1，P_2と置くと，2次方程式の解と係数の関係式より，次の式が導ける。

$$2.70 + 0.89K_p = -(P_1 + P_2) \quad ・・・式（29）$$

$$0.89K_I = P_1 P_2 \quad ・・・式（30）$$

式（29），(30）の関係が成立するのでK_p，K_Iの特性方程式はそれぞれ次式のように成り立つ。

$$K_p = -1.12(P_1 + P_2) - 3.03 \quad ・・・式（31）$$

$$K_I = 1.12P_1P_2 \quad ・・・式（32）$$

式（31），(32）におけるP_1，P_2は伝達関数の極であり，任意の負の実数の重解，または実部が負の共役複素数として指定することができる。

３．実験・考察

（a）P制御

別添図４に示すP制御切り替えスイッチをON，I

制御切り替えスイッチをOFFとすることで，P制御でのDCモータ駆動を行うことができる。P制御時の比例ゲインK_pは，所望の極を式（22）へ代入して求める。本稿では，極を-3.6，-6.0，-200と変化させたときの指令値追従特性を確認する。

式（22）を用いて，比例ゲインK_pを選定するとそれぞれ，1.1，3.7，221となる。この比例ゲインを出力できるように，別添図4の*4に示す反転増幅回路の抵抗値をそれぞれ決定する。本回路ではそれぞれ10kΩ，33kΩ，2.2MΩとして実験を行った。

P制御による実験結果を図15に示す。図15は指令値とタコメータ出力電圧を比較したものである。図15より，極を小さくするほど（比例ゲインを大きくするほど），定常偏差が小さくなっていることが確認できる。また，極が-200と極めて大きい場合でも振動的にはならないと確認できた。よって，P制御は制御理論に忠実な動作をしていると考えられる。

なお，指令値が0Vのときにタコメータ出力電圧が0Vとなっていないのは，制御系設計を簡易に行いたいという観点より，DCモータの非線形な系（偏差部）にoffset電圧を加えているためである。また，タコメータ出力電圧の立ち下がり時間が立ち上がり時間に比して長くなっているのは，リミッタ回路を用いて負の操作量を除去していることから，フリーラン状態であるためである。従って，この部分に関しては本稿では議論の対象外とする。

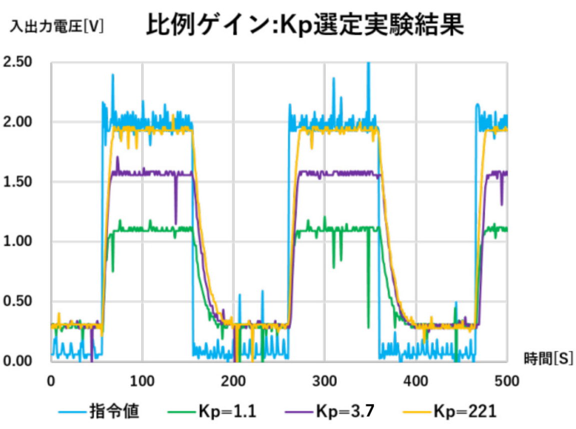


図15　P制御における指令値追従特性

（b）PI制御

別添図４に示すP制御切り替えスイッチ，およびI制御切り替えスイッチをともにONとするこで，PI制御でのDCモータ駆動を行うことができる。比例ゲインK_pおよび積分ゲインK_Iは，所望の極を式（31）および式（32）へそれぞれ代入して求める。本稿では，極を-2.85（重解），-2.85±j2.85（共役複素数）について，それぞれの指令値追従特性を確認する。このとき極の配置を図16に示す。

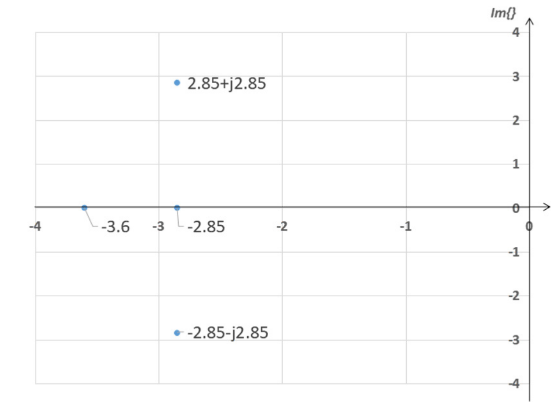


図16　極指定法による極の設計

極が-2.85（重解）の場合，式（31），(32）を用いて比例ゲインK_p = 3.4，積分ゲインK_I = 9.13とそれぞれ算出した。また，式（24）より積分器時定数T = 0.37sと求められる。よって，別添図4の*5に示す反転増幅回路の抵抗値33kΩ，積分器の抵抗値82kΩをそれぞれ決定し，実験を行った。

同様に極が-2.85±j2.85（共役複素数）の場合についても式（31），(32）を用いて比例ゲインK_p = 3.4，積分ゲインK_I = 18.3とそれぞれ算出した。また，式（24）より積分器時定数T = 0.18sと求められる。よって，別添図4の*5に示す反転増幅器の抵抗値33kΩ，積分器の抵抗値39kΩとそれぞれ決定し，同様の条件で実験を行った。

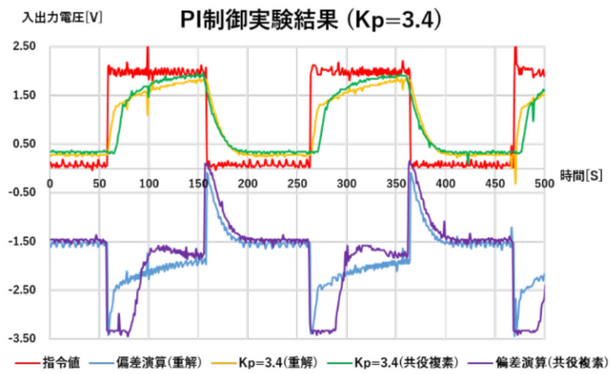


図17　PI制御実験結果 (K_p = 3.4)

PI制御の実験結果を図17に示す。図17は指令値とタコメータ出力電圧を比較したもの，および偏差信号（偏差演算用加算器の出力信号）である。図15と図17を比較すると，図17のPI制御においては，極の実部が大きい（比例ゲインが小さい）ものの，定常偏差が小さくなるように動作している。これは，積分器の働きによるものと考えられる。

次に，図17において極を重解と指定した場合と，共役複素数として指定した場合の比較を行う。本来は，極の虚部を0とすると臨界制動であるために振動的な応答にはならず，極の虚部を0としない場合には振動的な応答を示すはずである。図17を見ると，偏差信号において共役複素数と指定して極を与えた場合，多少の振動的な応答が確認できるが，タコメータ出力電圧において大きな振動は確認できなかった。これは，DCモータのモデル化誤差等の影響が考えられるが，詳細は今後の検討課題とする。

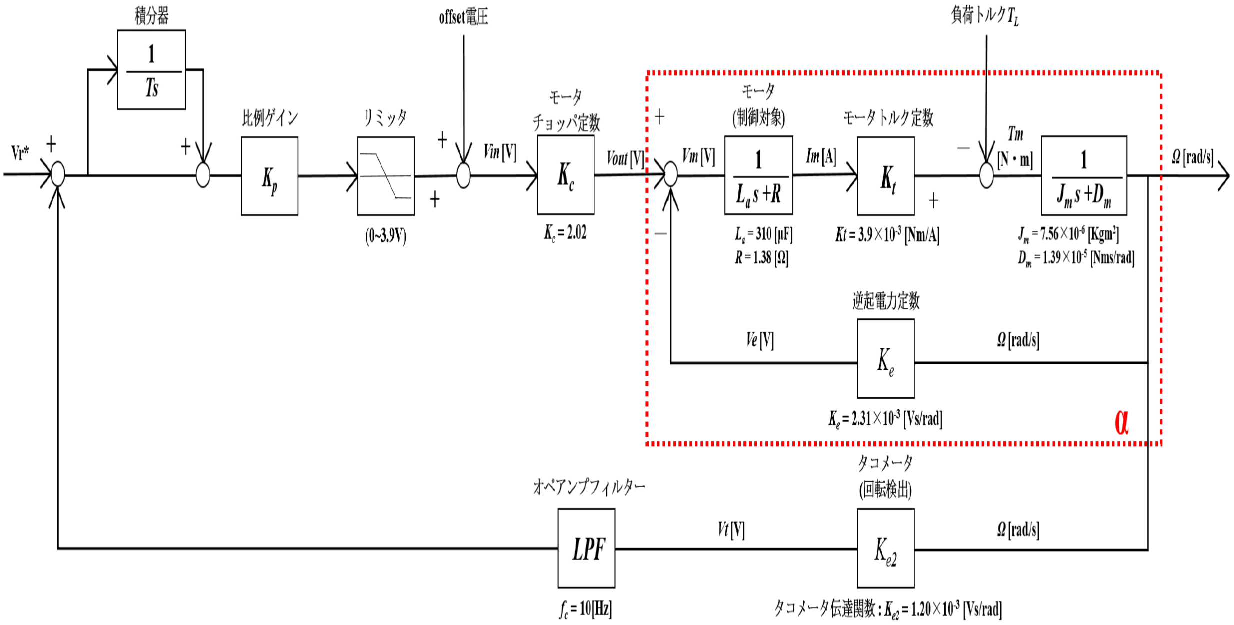
4. まとめ

本稿において，アナログ電子回路による模型用DCモータの速度制御系設計にかかる教材を開発し，教材として制御理論通りの挙動を示すかを検討した。その結果，速度フィードバックにおいて，おおむね理論通りの結果を得られた。

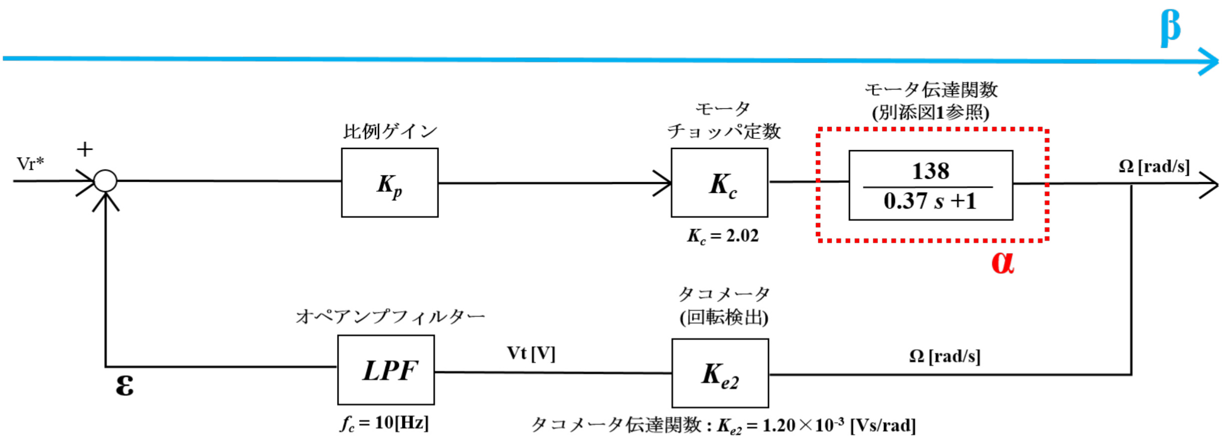
今後は，DCモータにおけるモデル化誤差要因を解明し，指定した極と実機の応答の設計精度の向上について検討する。また，比例ゲインや積分器時定数を簡易に変更できるように，アタッチメント等を採用し，教材としての利便性を向上させていく。

＜参考文献＞

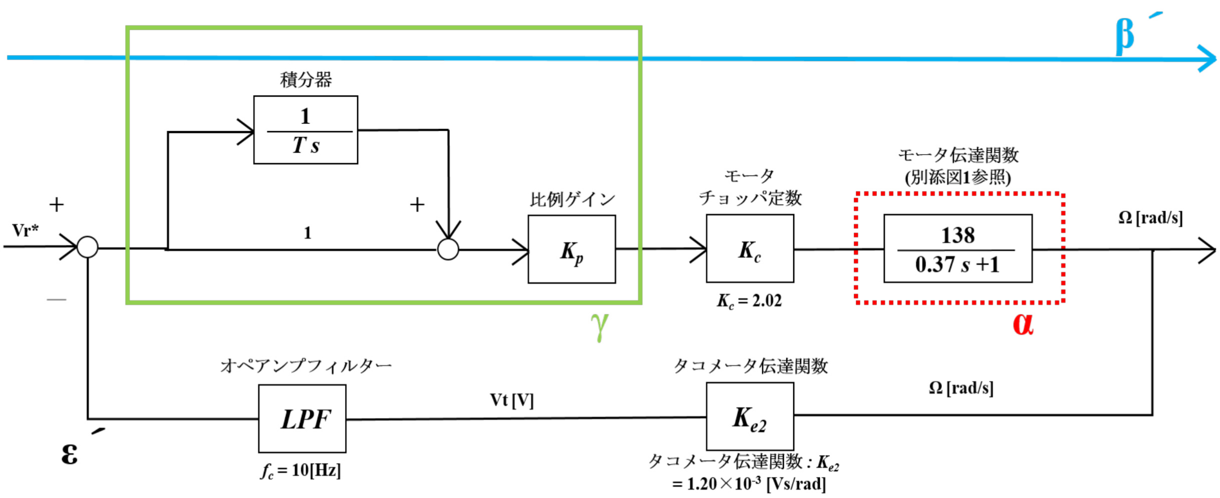
1）茂木望，“「職業能力開発の実践」実機とシミュレーションを連携したフィードバック制御に係る教材の作成及びその教育訓練効果に関する検討”，平成29年度　職業能力開発論文コンクール
2）平田光男，“ArduinoとMATLABで制御系設計をはじめよう！”，Tech Share，2012



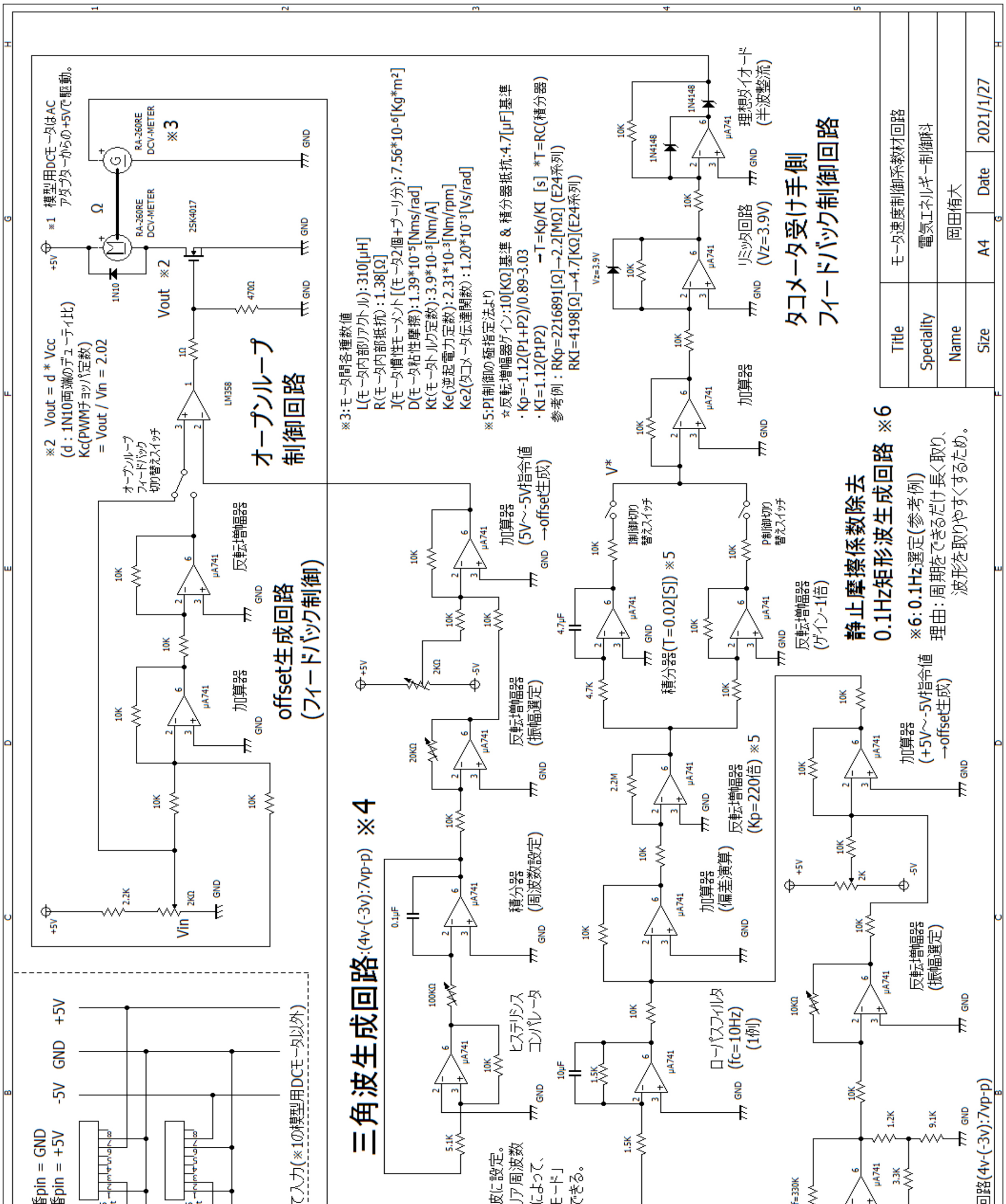
別添図１　速度制御系教材のブロック線図



別添図２　モータ速度制御系ブロック線図（P 制御）



別添図３　モータ速度制御系ブロック線図（PI 制御）



別添図４　モータ速度制御系教材回路